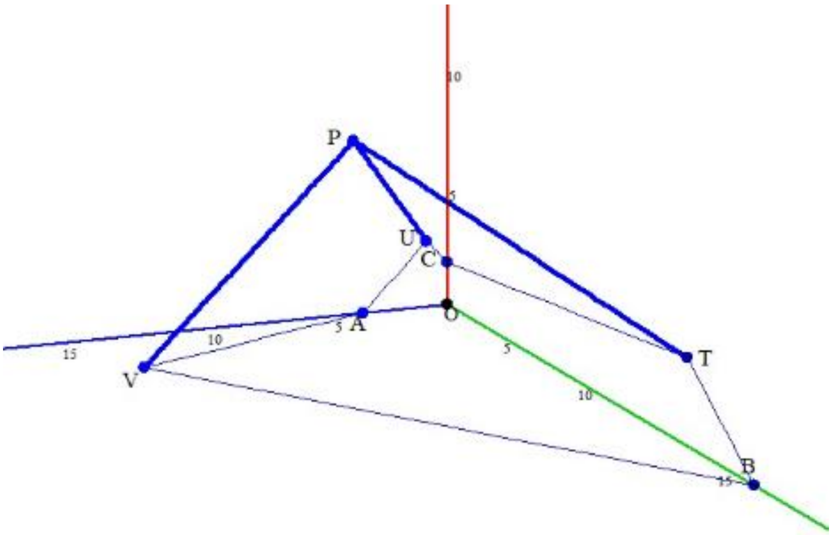
Ⅶ 等しくなる三平方の和（具体例で検証）

１　「三平方の和」が等しくなることの具体例での検証



この立体の座標は、O(0,0,0),A(4,0,0),B(0,16,0),C(0,0,2),T(0,14,2),U(1,0,3),V(12,4,0),P(5,4,7)　である。

これが、６個の四角形で囲まれ、かつ条件にあった六面体であるかを確認する。

Ａ，Ｂ，Ｃは座標軸上にあることから、点Ｏを囲む３つの面は互いに垂直である。

$\overrightarrow{PT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OP}=(0,14,2)-(5,4,7)=(-5,10,-5)$

$\overrightarrow{PU}=\overrightarrow{OU}-\overrightarrow{OP}=(1,0,3)-(5,4,7)=(-4,-4,-4)$

$\overrightarrow{PV}=\overrightarrow{OV}-\overrightarrow{OP}=(12,4,0)-(5,4,7)=(7,0,-7)$　より、

$\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{PU}=(-5)\cdot(-4)+10\cdot(-4)+(-5)\cdot(-4)=0$

$\overrightarrow{PU}\cdot\overrightarrow{PV}=(-4)\cdot 7+(-4)\cdot 0+(-4)\cdot(-7)=0$

$\overrightarrow{PV}\cdot\overrightarrow{PT}=7\cdot(-5)+0\cdot 10+(-7)\cdot(-5)=0$

だから、

$\overrightarrow{PT}\perp\overrightarrow{PU}$, $\overrightarrow{PU}\perp\overrightarrow{PV}$, $\overrightarrow{PV}\perp\overrightarrow{PT}$　であり、

点Ｐを囲む３つの面は互いに垂直である。

次に各面が四角形であることを確認する。

$\overrightarrow{OT}=\frac{7}{8}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OU}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OV}=3\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$　・・・①

であるので、点Ｏを囲む３つの面は確かに四角形である。

また、

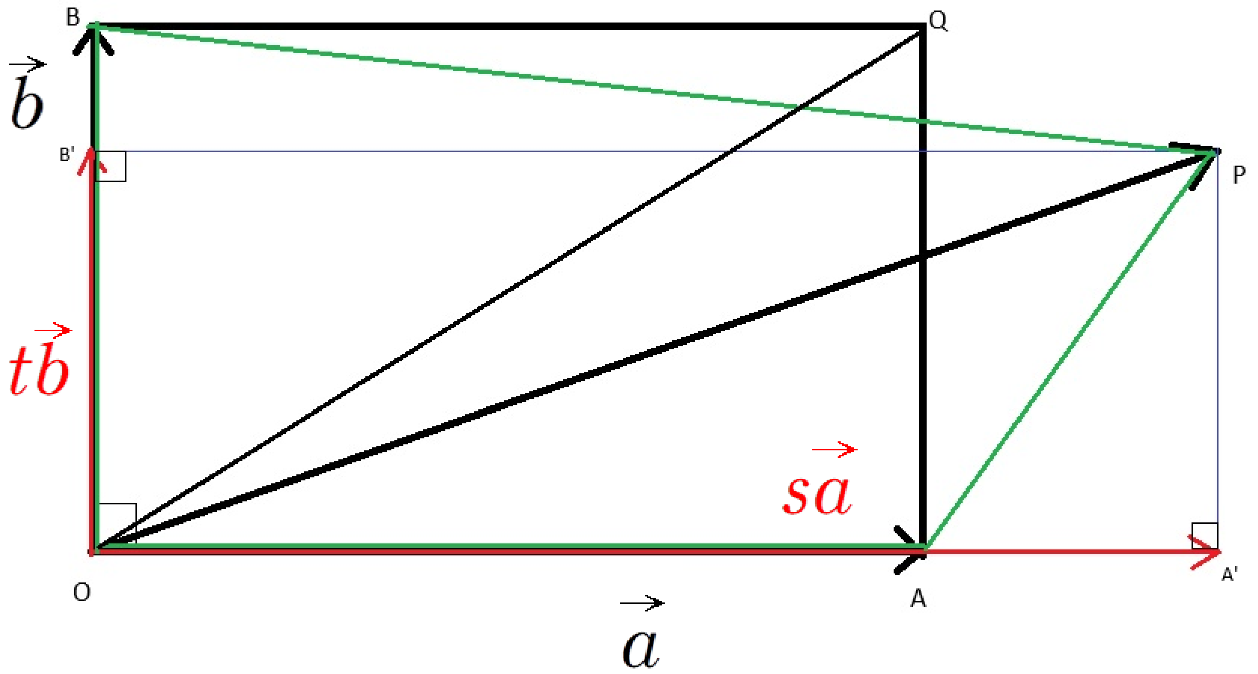
$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PU}+\frac{3}{7}\overrightarrow{PV}$, $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{7}\overrightarrow{PV}+\frac{6}{5}\overrightarrow{PT}$, $\overrightarrow{PC}=\frac{1}{15}\overrightarrow{PT}+\frac{7}{6}\overrightarrow{PU}$　・・・②

であるので、点Ｐを囲む３つの面は確かに四角形である。

次に各面の面積を調べる。各面は一つの角が直角な四角形であるので、その面積の求め方を考えておく。

一般に次の図において、$\vec{a}\perp\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ であるときの、

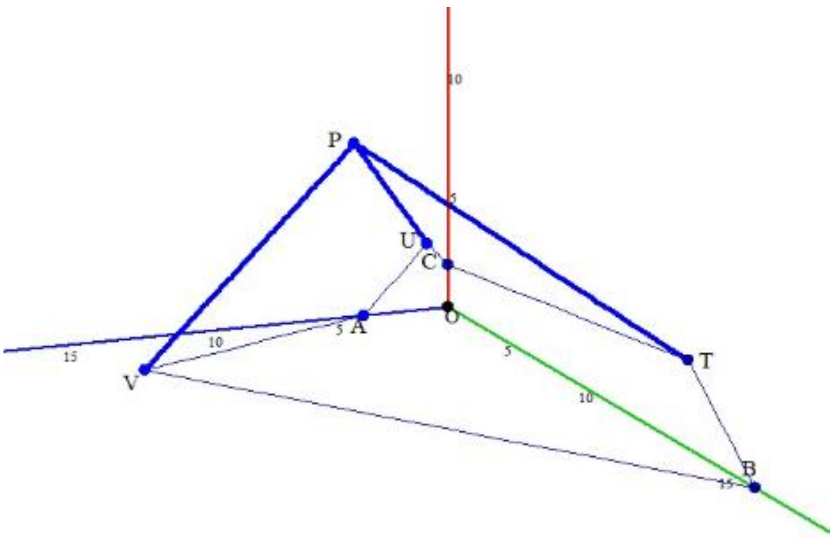
四角形ＯＡＰＢの面積を、$\vec{a},\vec{b},s,t$ で表すことを考える。



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=t\vec{b}$　とする。

ＯＡを底辺とした三角形を考えて、$\mathrm{A'P}=t\mathrm{AQ}$　であることから、$\triangle\mathrm{OAP}=t\triangle\mathrm{OAQ}$
ＯＢを底辺とした三角形を考えて、$\mathrm{B'P}=s\mathrm{BQ}$　であることから、$\triangle\mathrm{OBP}=s\triangle\mathrm{OBQ}$

$$\begin{aligned}\text{四角形}\mathrm{OAPB}&=\triangle\mathrm{OAP}+\triangle\mathrm{OBP}\\&=t\triangle\mathrm{OAQ}+s\triangle\mathrm{OBQ}\\&=t\times\frac{1}{2}\text{四角形}\mathrm{OAQB}+s\times\frac{1}{2}\text{四角形}\mathrm{OAQB}\\&=t\times\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|+s\times\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\\&=\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(s+t)\end{aligned}$$



四角形ＯＢＴＣの面積をS_1、四角形ＯＣＵＡの面積をS_2、四角形ＯＡＶＢの面積をS_3、
四角形ＰＵＡＶの面積をS_4、四角形ＰＶＢＴの面積をS_5、四角形ＰＴＣＵの面積をS_6、とする。

$$|\overrightarrow{PT}| = \sqrt{(-5)^2+10^2+(-5)^2} = 5\sqrt{6}\ ,$$
$$|\overrightarrow{PU}| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-4)^2} = 4\sqrt{3}\ ,$$
$$|\overrightarrow{PV}| = \sqrt{7^2+0^2+(-7)^2} = 7\sqrt{2}\ ,$$
$$|\overrightarrow{OA}| = 4\ ,$$
$$|\overrightarrow{OB}| = 16\ ,$$
$$|\overrightarrow{OC}| = 2$$

であることと、①②を用いて、

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\left(\frac{7}{8}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot 16\cdot 2\cdot\frac{15}{8} = 30$$
$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{7}{4} = 7$$
$$S_3 = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\left(3+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 16\cdot\frac{13}{4} = 104$$
$$S_4 = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{PU}|\cdot|\overrightarrow{PV}|\left(1+\frac{3}{7}\right) = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2}\cdot\frac{10}{7} = 20\sqrt{6}$$
$$S_5 = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{PV}|\cdot|\overrightarrow{PT}|\left(\frac{1}{7}+\frac{6}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{6}\cdot\frac{47}{35} = 47\sqrt{3}$$
$$S_6 = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{PT}|\cdot|\overrightarrow{PU}|\left(\frac{1}{15}+\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\frac{37}{30} = 37\sqrt{2}$$

となるので、

$$S_1+S_2+S_3 = 30^2+7^2+104^2 = 11756$$
$$S_4+S_5+S_6 = (20\sqrt{6})^2+(47\sqrt{3})^2+(37\sqrt{2})^2 = 11756$$

よってこの六面体の６つの面の面積において、

$$S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2 = S_4{}^2+S_5{}^2+S_6{}^2$$

が成り立つことが確認できた。