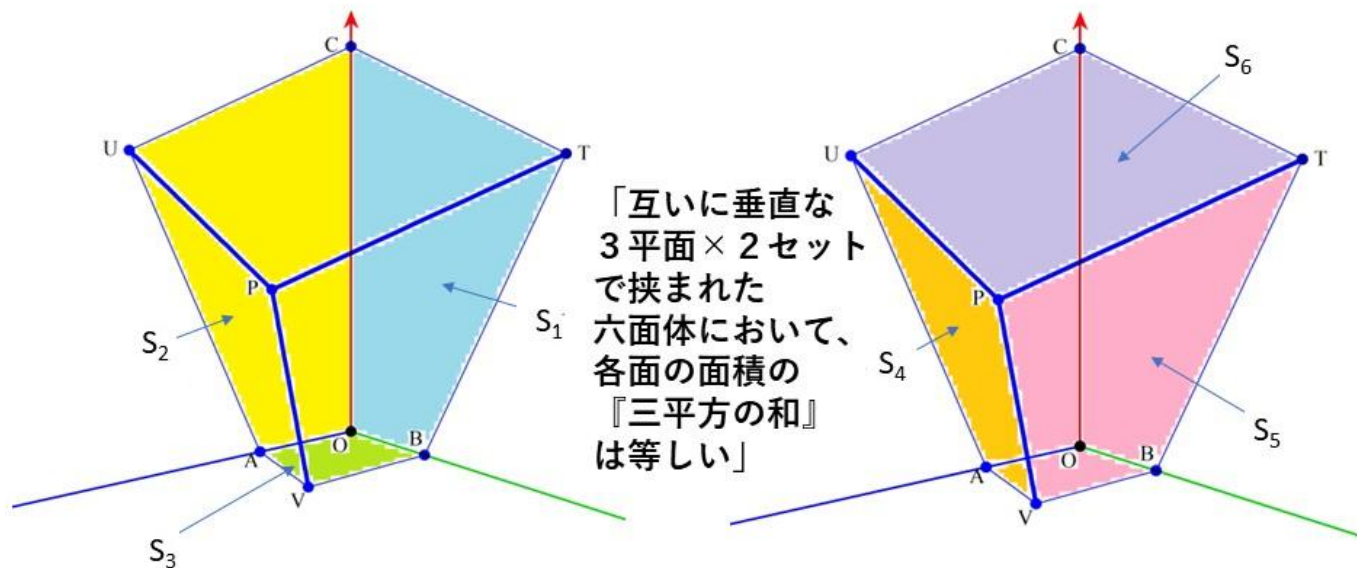


## VI 等しくなる三平方の和(性質と証明)

### 1 任意の多面体の「面積法ベクトル」の和が $\vec{0}$ になることが示せたので…

次の「三平方の和」が証明できます。

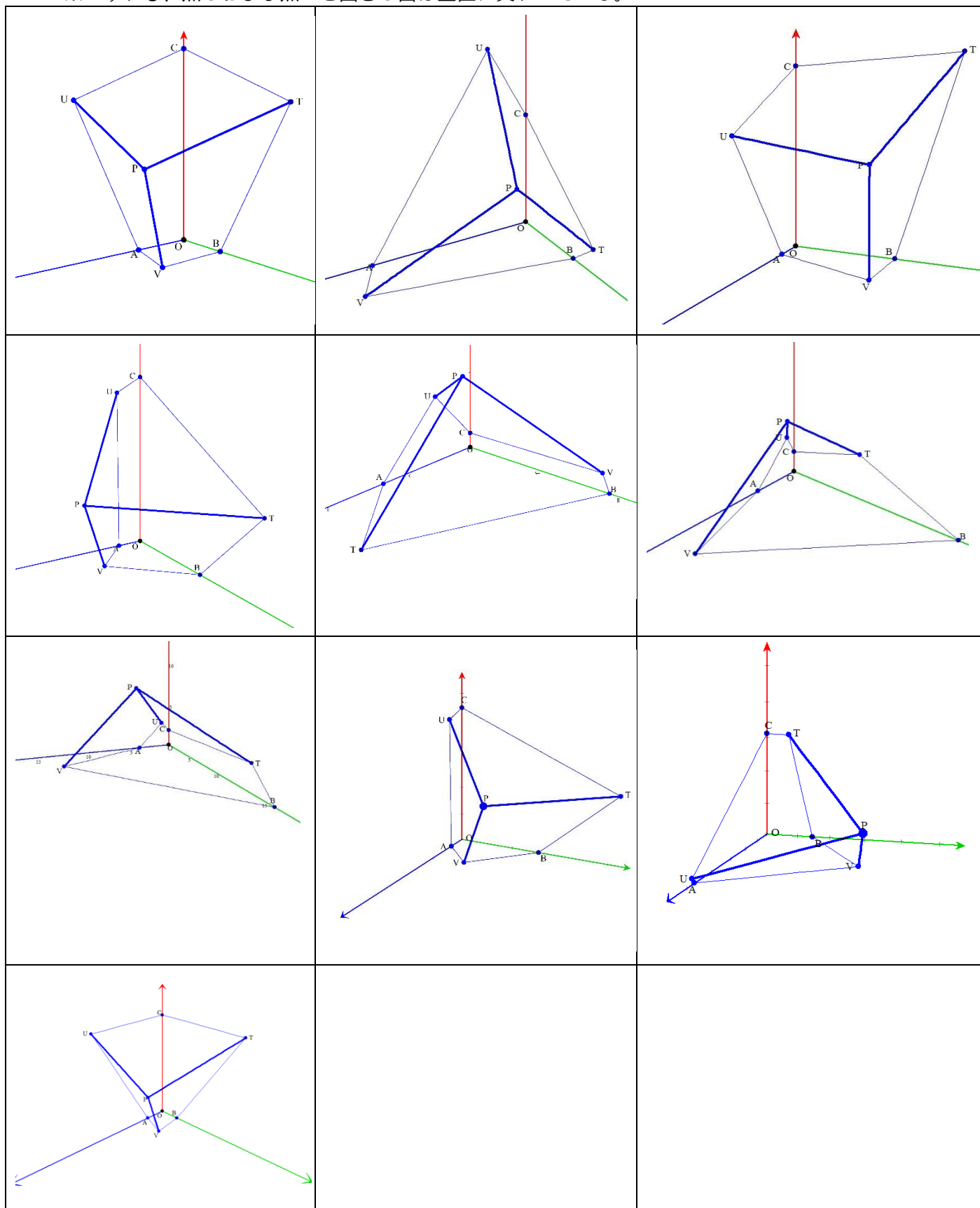
- (1) 互いに垂直な3平面×2セットで挟まれた六面体において、各面の面積の「三平方の和」は等しい



$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_4^2 + S_5^2 + S_6^2$$

## (2) 立体の例

※いずれも、点Oおよび点Pを囲む3面は垂直に交わっている。



(3) 「3平方の和」が等しくなることの証明

**証明**

点Oを囲む3つの面の面積を、 $S_1, S_2, S_3$  とし、その各面の面積法ベクトルを、 $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$  とする。

点Pを囲む3つの面の面積を、 $S_4, S_5, S_6$  とし、その各面の面積法ベクトルを、 $\vec{s}_4, \vec{s}_5, \vec{s}_6$  とする。

明らかに  $|\vec{s}_i| = S_i \ (i = 1, 2, \dots, 6)$  である。・・・①

面同士が垂直に交わる時、面積法ベクトル同士も垂直であるので、

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0, \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 = 0, \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1 = 0, \quad \vec{s}_4 \cdot \vec{s}_5 = 0, \vec{s}_5 \cdot \vec{s}_6 = 0, \vec{s}_6 \cdot \vec{s}_4 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

また、先に述べた通り、この六面体においても、「面積法ベクトル」の和は $\vec{0}$ になるので、

$$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 + \vec{s}_4 + \vec{s}_5 + \vec{s}_6 = \vec{0}$$

移項して、 $\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 = -\vec{s}_4 - \vec{s}_5 - \vec{s}_6$

両辺を内積で2乗する。

$$|\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3|^2 = |-\vec{s}_4 - \vec{s}_5 - \vec{s}_6|^2$$

②より

$$|\vec{s}_1|^2 + |\vec{s}_2|^2 + |\vec{s}_3|^2 = |\vec{s}_4|^2 + |\vec{s}_5|^2 + |\vec{s}_6|^2$$

①より

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_4^2 + S_5^2 + S_6^2$$

**終**