

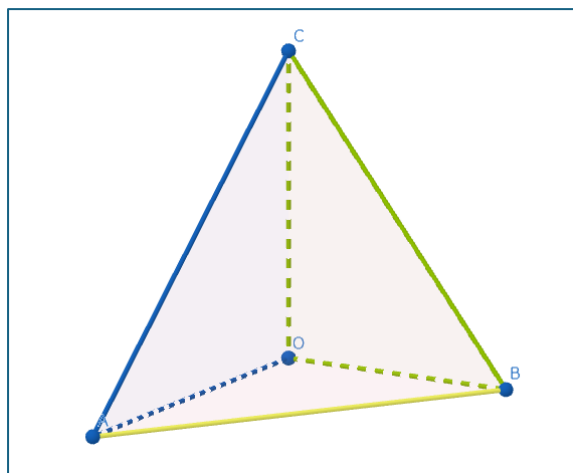
IV 四面体の「面積法ベクトル*」の和は $\vec{0}$ になるので・・・

(*名称はYahoo!知恵袋=ID「灰色トム号」さんの造語。)

1 四面体の「面積法ベクトル」の和が $\vec{0}$ になることが示せたので・・・

次の2つの事柄が証明できる。

(1) いわゆる「四平方の定理」(数学愛好家の中ではそう呼ばれていますね)



面 $OAB \perp$ 面 $OBC \perp$ 面 OCA である四面体 $OABC$ において、

$$\triangle OAB^2 + \triangle OBC^2 + \triangle OCA^2 = \triangle ABC^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ

証明

面 OAB の面積法ベクトルは、外積を使って、 $\frac{1}{2} \vec{OB} \times \vec{OA}$... ①

同様に面 OBC 、面 OCA 、面 ABC の面積法ベクトルは、

$$\frac{1}{2} \vec{OC} \times \vec{OB} \quad \dots \textcircled{2}, \quad \frac{1}{2} \vec{OA} \times \vec{OC} \quad \dots \textcircled{3}, \quad \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{AC} \quad \dots \textcircled{4}$$

ここで、明らかに、①, ②, ③は、互いに垂直。... ⑤

四面体の面積法ベクトルの和は $\vec{0}$ になるので、

$$\frac{1}{2} (\vec{OB} \times \vec{OA} + \vec{OC} \times \vec{OB} + \vec{OA} \times \vec{OC} + \vec{AB} \times \vec{AC}) = \vec{0}$$

分母をはらって、移項。

$$\vec{OB} \times \vec{OA} + \vec{OC} \times \vec{OB} + \vec{OA} \times \vec{OC} = -\vec{AB} \times \vec{AC}$$

両辺を内積で2乗する。

$$|\vec{OB} \times \vec{OA} + \vec{OC} \times \vec{OB} + \vec{OA} \times \vec{OC}|^2 = |\vec{AB} \times \vec{AC}|^2$$

⑤より、

$$|\vec{OB} \times \vec{OA}|^2 + |\vec{OC} \times \vec{OB}|^2 + |\vec{OA} \times \vec{OC}|^2 = |\vec{AB} \times \vec{AC}|^2 \quad \dots \textcircled{6}$$

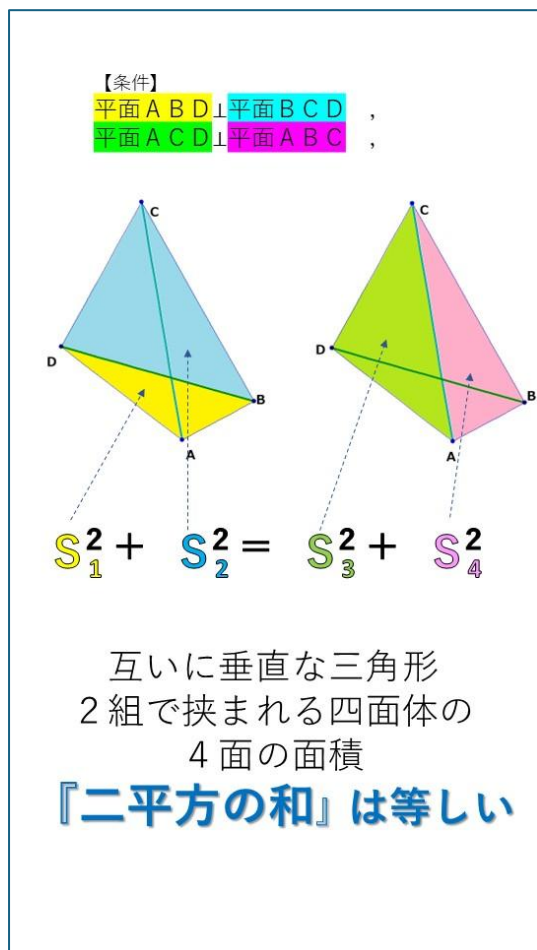
ここで

$$\left| \frac{1}{2} \vec{OB} \times \vec{OA} \right| = \triangle OAB, \quad \left| \frac{1}{2} \vec{OC} \times \vec{OB} \right| = \triangle OBC, \quad \left| \frac{1}{2} \vec{OA} \times \vec{OC} \right| = \triangle OCA, \quad \left| \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \triangle ABC$$

であるから、

⑥から、 $\triangle OAB^2 + \triangle OBC^2 + \triangle OCA^2 = \triangle ABC^2$ が導かれる。 終

(2) 下図の「二平方の和*」は等しい (*名称は k1feb15 の造語)



「二平方の和」は等しい

面 $ABC \perp$ 面 BCD , 面 $ACD \perp$ 面 ABC
 を満たす四面体 $ABCD$ において、
 $\triangle ABD^2 + \triangle BCD^2 = \triangle ACD^2 + \triangle ABC^2$

が成り立つ

証明

各面の面積法ベクトルは、

$$\frac{1}{2} \vec{AD} \times \vec{AB} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2} \vec{BD} \times \vec{BC} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{AD} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{AB} \quad \dots \textcircled{4}$$

ここで明らかに、①、②は垂直。③、④は垂直・・・⑤

四面体の面積法ベクトルの和は $\vec{0}$ になるので、

$$\frac{1}{2} (\vec{AD} \times \vec{AB} + \vec{BD} \times \vec{BC} + \vec{AC} \times \vec{AD} + \vec{AC} \times \vec{AB}) = \vec{0}$$

分母をはらって、移項。

$$\vec{AD} \times \vec{AB} + \vec{BD} \times \vec{BC} = -\vec{AC} \times \vec{AD} - \vec{AC} \times \vec{AB}$$

両辺を内積で2乗する。

$$|\vec{AD} \times \vec{AB} + \vec{BD} \times \vec{BC}|^2 = |-\vec{AC} \times \vec{AD} - \vec{AC} \times \vec{AB}|^2$$

⑤より、

$$|\vec{AD} \times \vec{AB}|^2 + |\vec{BD} \times \vec{BC}|^2 = |\vec{AC} \times \vec{AD}|^2 + |\vec{AC} \times \vec{AB}|^2 \quad \dots \textcircled{6}$$

ここで

$$\left| \frac{1}{2} \vec{AD} \times \vec{AB} \right| = \triangle ABD, \left| \frac{1}{2} \vec{BD} \times \vec{BC} \right| = \triangle BCD, \left| \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{AD} \right| = \triangle ACD, \left| \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{AB} \right| = \triangle ABC$$

であるから、

⑥から、 $\triangle ABD^2 + \triangle BCD^2 = \triangle ACD^2 + \triangle ABC^2$ が導かれる。

□ 終