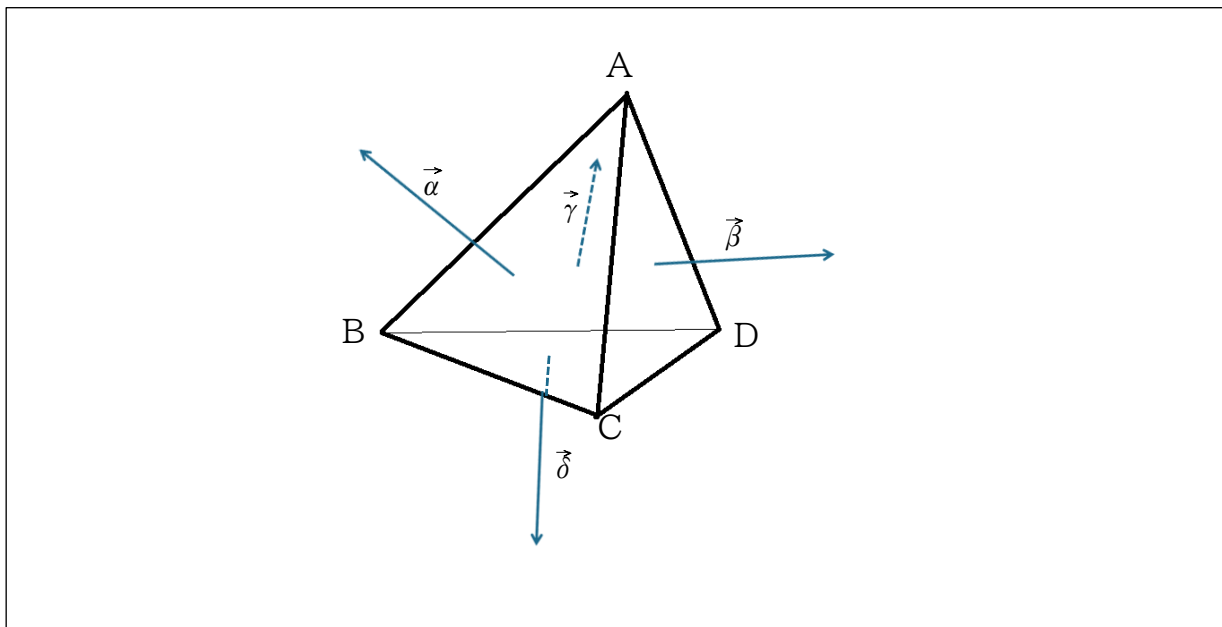


Ⅲ 四面体の「面積法ベクトル*」の和は $\vec{0}$ になる（*名称はYahoo!知恵袋=ID「灰色トム号」さんの造語。）

1 空間内の任意の四面体A B C Dの各面において、次の「面積法ベクトル」を定義する。

「面積法ベクトル」の定義

- ・ 面の面積を大きさに持つ。
- ・ 面と垂直である。
- ・ 向きは、四面体A B C Dの内部から見て、外向きである。



2 「面積法ベクトル」の求め方（ベクトルの外積を利用）

上図の $\vec{\alpha}$ ならば、 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ は $\triangle ABC$ 二つ分の面積を長さにもつ、面A B Cに垂直なベクトルになるので、

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \text{ である。}$$

3 「面積法ベクトル」の和は $\vec{0}$ になる

証明 上図において

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \quad \vec{\beta} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) \quad \vec{\gamma} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB})$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

■

*サイト「物理のかぎしっぽ」 <https://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/AreaVector/>
によると、このベクトルは「面積ベクトル」と呼ばれています。